# 解答速報

**医歯専門予備校 メルリックス学院 MELURIX × 医学部受験予備校 医特**

# 大阪医科薬科大学 一般選抜前期

**数学**

$\boxed{1}$

(1)

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1 x\cos\frac{\pi}{2}x^2\,dx$$

$\dfrac{\pi x^2}{2}=t$とおくと，$\pi x dx=dt$

| $x$ | $0\to\ 1$ |
|---|---|
| $t$ | $0\to\ \dfrac{\pi}{2}$ |

よって，

$$(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\cos t\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}$$

(2)

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p-2}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2\frac{k}{n}\sin 2\pi\frac{k}{n}$$

$p=2$のとき，

$$(\text{与式})=\int_0^1 2x\sin 2\pi x\,dx=\left[-\frac{x}{\pi}\cos 2\pi x\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{\pi}\cos 2\pi x\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}+\left[\frac{1}{2\pi^2}\sin 2\pi x\right]_0^1=-\frac{1}{\pi}$$

$p\geqq 3$のとき，

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p-2}}\left(-\frac{1}{\pi}\right)=0$$

$\boxed{2}$

(1)

$C, D$は$l$上にあるので, $C$:$(-6k\ ,2k\ ,5k)$, $D$:$(-6m\ ,2m\ ,5m)$とおける。

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{m}$より

$(-6k+10\ ,2k\ ,5k-14)\cdot(-6\ ,2\ ,5)=65k-130=0$より$k=2$

よって, $C$ : $(-12\ ,4\ ,10)$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{m}$より

$(-6m-8\ ,2m+1\ ,5m+3)\cdot(-6\ ,2\ ,5)=65m+65=0$より$m=-1$

よって,$D$:$(6\ ,-2\ ,-5)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-4)^2}=6$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2}=3$

(2)

$O\ ,C\ ,D$は同一直線上にあるので, $O\ ,A\ ,C\ ,D$は同一平面上にある。

$B$がこの平面にあると仮定すると,

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-10s-12t\ ,4t\ ,14s+10t)$

となるので, $-10s-12t=8$かつ$4t=4$ かつ$14s+10t=10$

これを同時に満たす$s\ ,t$は存在しないので矛盾。

よって, $A\ ,B\ ,C\ ,D$は同一平面上に存在しない。

(3)

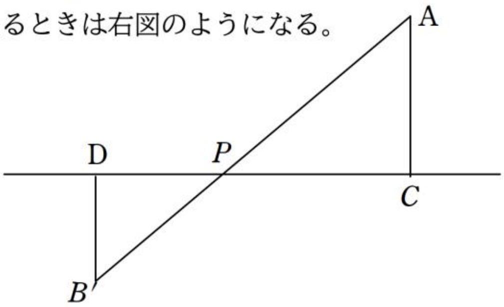
$l$の周りに$B$を回転させて平面ACD上かつ$l$に対して$A$とは反対側に移動させた点を$B'$とする。すると$AP+BP=AP+B'P$が最小になるときは右図のようになる。

△ACP∽△B’DPとなり,相似比は2:1

つまり, $P$は$CD$を2:1に内分した点。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3}=(0\ ,0\ ,0)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=3\sqrt{74}$



$\boxed{3}$

$y=x^2-x+2$と$y=2x$の交点の$x$座標は

$x^2-x+2=2x$　つまり $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$　$x=1,2$

よって,$1\leqq t\leqq 2$

$P(t\,,t^2-t+2)$と$L:2x-y=0$の距離$r$は

$$r=\frac{|2t-t^2+t-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-t^2+3t-2|}{\sqrt{5}}=\frac{-t^2+3t-2}{\sqrt{5}}\ (\because 1\leqq t\leqq 2)$$

$PH$は$(t\,,t^2-t+2)$を通る傾き$-\frac{1}{2}$の線分であるので,

$$y=-\frac{1}{2}(x-t)+t^2-t+2=-\frac{1}{2}x+t^2-\frac{1}{2}t+2$$

$H$は$y=2x$と$y=-\frac{1}{2}x+t^2-\frac{1}{2}t+2$の交点より,$x=\frac{2t^2-t+4}{5}$

$OH$の$x$座標の差は$\frac{2t^2-t+4}{5}$であり, 直線の傾きと斜辺の長さの関係より

$\sqrt{5}$倍である

よって, $h=\frac{2t^2-t+4}{\sqrt{5}}$

(2)　$C:y=x^2-x+2$と$L:y=2x$の交点を$O$から近い順に$H_1\,,H_2$とおく。

$OH_1=\sqrt{5}\,,OH_2=2\sqrt{5}$

したがって, 求める体積$V$は

$V=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}}\pi r^2dh$ と表現できる。

(1)より$r=\frac{-t^2+3t-2}{\sqrt{5}}$, $h=\frac{2t^2-t+4}{\sqrt{5}}$　$dh=\frac{4t-1}{\sqrt{5}}dt$

| $h$ | $\sqrt{5}\to 2\sqrt{5}$ |
|---|---|
| $t$ | $1\to\ 2$ |

$$V=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_1^2(t-1)^2(t-2)^2(4t-1)dt$$

$t-1=s$とおけば$dt=ds$

| $t$ | $1\to 2$ |
|---|---|
| $s$ | $0\to 1$ |

$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^1 s^2(s-1)^2(4s+3)ds$$

$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^1 4s^5-5s^4-2s^3+3s^2ds$$

$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\left[\frac{2}{3}s^6-s^5-\frac{1}{2}s^4+s^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{5\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\sqrt{5}}{150}\pi$$

$\boxed{4}$

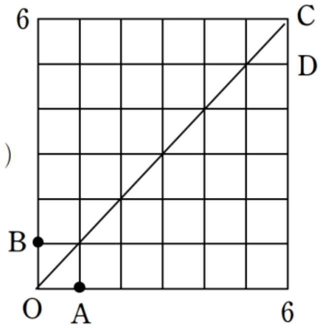
(1)

$$
\begin{aligned}
{}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1} &= \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}(n+1-n) \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \frac{{}_{2n}C_n}{n+1}
\end{aligned}
$$

(2)

(ⅰ)　表6回裏6回出る確率は${}_{12}C_6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{231}{1024}$

(ⅱ)




題意の場合の数は, $A\to D$への最短ルートの道順からOCと共有点を持つ道順を除いたものである。

A→Dの道順の中でOCと共有点を持つ道順はOCについて対称移動するとB→Dの道順と同じである。

よって, ${}_{10}C_5-{}_{10}C_4=\frac{{}_{10}C_5}{6}=42$通り　$(\because(1))$

よって, 全ての場合の数は同様に確からしいので, 求める条件付確率は$\frac{42}{{}_{12}C_6}=\frac{1}{22}$

～講評～

1　積分の計算

一見して区分求積法をテーマとしていることがわかる内容。計算問題としても基本的なものとなっていた。

2　空間のベクトル

座標空間における折れ線の長さの最小値を求める問題。計算より図形的な考察に重点を置いた内容。

3　回転体の体積

傾きをもつ直線を軸とした回転体の体積を求める問題。多くの受験生にとっては斜方回転として、テキストでもなじみがあるだろう。誘導が丁寧につけられていて、計算部分も平易なものとなっている。

4　確率

硬貨投げによって得点を決めるランダムウォークの問題。題意は理解しやすく、典型問題であるので完答できた受験生も多いだろう。

癖の強い医学部の問題というより模擬試験のような出題で、例年と比べて内容・計算とも易化している。上位校だけに、一次合格には最低でも7割は確保したい。